

DINAMICA DEI FLUIDI IDEALI (*)

6.1 - Un fluido "ideale" (o "perfetto") è un fluido che si suppone privo di viscosità. Come si è detto al n. 2.2, il moto di tale fluido ha luogo senza che insorgano tensioni tangenziali; di conseguenza la pressione, normale sempre all'elemento che si considera, ha in ogni punto un valore unico indipendente dall'orientamento (distribuzione isotropica).

Benchè tutti i fluidi siano viscosi, lo schema di fluido ideale trova importanti applicazioni anche nel campo tecnico, perchè ad esso si può ricorrere efficacemente per lo studio dei fenomeni nei quali le dissipazioni di energia meccanica hanno scarsa importanza rispetto alle trasformazioni di energia in atto (notare: il comportamento di f.ideale, detto al n. 2.2, per cui acqua, petrolio, aria, ecc.. possono essere considerati f.ideali ad es. nell'efflusso da un serbatoio o nella propagazione di un'onda, ma non certamente nel moto di trasporto in una lunga condotta).

6.2 - Eq.ni del moto di un fluido ideale (eq.ni di Eulero)

Si è già visto al cap. 5 (cfr. eq. 5.1) che l'applicazione del principio della Q.d.M. alla massa che all'istante t occupa il volume V (racchiuso dalla superficie A) porta alla equazione:

$$(6.1) \quad \frac{D}{Dt} \int_{\mathcal{V}} \rho \vec{v} dV = \int_V \rho \vec{f} dV + \int_A \vec{p} dA$$

avendo indicato con \mathcal{V} il volume mobile occupato dagli stessi elementi fluidi in istanti successivi.

Con riferimento al volume V come volume di controllo (vol.geom. fisso), l'eq.ne (6.1) si può trasformare applicando al 1° membro il teor. di trasporto nella forma (4.28), che tiene già conto dell'eq. di continuità; segue

$$(6.2) \quad \int_V \rho \frac{D\vec{v}}{Dt} dV = \int_V \rho \vec{f} dV + \int_A \vec{p} dA$$

Assumendo la condizione di fluido ideale è: $\vec{p} = \vec{n} p$. L'integrale di superficie $\int_A p \vec{n} dA$ della (6.2) si può allora trasformare nell'integrale di volume - $\int_V \vec{\nabla} p dV$ (teor. del gradiente) e, tenuto conto dell'arbitrarietà del volume considerato, dalla eq.ne integrale si ottiene l'eq.ne differenziale del moto di un fluido ideale

(*) Stesura del prof.ing. Enrico Marchi

(6.3)

$$\boxed{\vec{\nabla} p = \rho \left(\vec{f} - \frac{D\vec{v}}{Dt} \right)} \quad (\text{Eq. di Eulero})$$

Alla (6.3) corrispondono, in coordinate cartesiane, le tre equazioni scalari

$$(6.4) \quad p_{,i} = \rho \left(f_i - \frac{Dv_i}{Dt} \right) \quad \text{con } i = x, y, z$$

essendo

$$(6.5) \quad \frac{Dv_i}{Dt} = \frac{\partial v_i}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) v_i$$

la derivata sostanziale della componente v_i della velocità (cioè l'accelerazione a_i).

Ad esempio:

$$(6.6) \quad a_x = \frac{Dv_x}{Dt} = \frac{\partial v_x}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) v_x = \frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_x}{\partial z}$$

6.3 - Le condizioni al contorno. La superficie di contorno di una massa fluida è la superficie che la separa da altri fluidi e/o da "pareti" solide. Su tale superficie s'impongono condizioni di due specie.

La condizione cinematica esprime il vincolo che la superficie di contorno sia formata sempre con le stesse particelle. Detta $\eta(x, y, z; t) = 0$ l'eq.ne che la definisce, poichè essa dev'essere soddisfatta al tempo $t+dt$ dagli elementi fluidi che hanno percorso le traiettorie di componenti $v_i dt$, cioè: $\eta(x + v_x dt, y + v_y dt, \dots; t + dt) = 0$, si può scrivere

$$(6.7) \quad \frac{D\eta}{Dt} = \frac{\partial \eta}{\partial t} + \vec{v} \cdot \vec{\nabla} \eta = 0$$

Se la superficie di contorno è ferma: $\partial \eta / \partial t = 0$ e quindi $\vec{v} \cdot \vec{\nabla} \eta = 0$; ossia \vec{v} non ha componenti in direzione normale alla superficie ($v_n = 0$).

Quando la superficie di contorno separa due fluidi, alla condizione cinematica (6.7) va aggiunta la condizione dinamica di uguaglianza delle pressioni dei due fluidi in ogni punto della superficie considerata (purchè la curvatura non sia così accentuata da rendere apprezzabile la differenza di pressione Δp dovuta alla tensione superficiale: $\Delta p = \sigma (1/R_1 + 1/R_2)$, con R_1 ed R_2 raggi principali di curvatura). In particolare sul pelo libero, a contatto con l'atmosfera, dev'essere $p = p_{atm}$.

6.4 - Il teorema di Bernoulli

Sotto le seguenti condizioni:

1) Fluido ideale; quindi validità dell'eq.ne (6.3) di Eulero

2) Campo delle forze di massa conservativo

$$\vec{f} = \vec{\nabla}\varphi \quad ; \quad \text{in particolare c.gravitazionale} \quad \varphi = -gz$$

(con z verticale positivo verso l'alto)

3) Fluido in moto barotropico : $\varrho = \varrho(p)$

$$\frac{1}{\varrho} \vec{\nabla}p = \vec{\nabla} \int \frac{dp}{\varrho} \quad (*) ; \quad \text{in particolare, per f. incomprimibile} = \vec{\nabla} \left(\frac{p}{\varrho} \right)$$

dall'eq. (6.3) deriva

$$(6.8) \quad \vec{\nabla} \left(\int \frac{dp}{\varrho} - \varphi \right) = - \frac{D\vec{v}}{Dt} ; \quad \text{in particolare} \quad \vec{\nabla} \left(\frac{p}{\varrho} + gz \right) = - \frac{D\vec{v}}{Dt} .$$

Proiettando la (6.8) su una linea s di corrente, si ottiene al 2° membro

$$(6.9) \quad \frac{Dv_s}{Dt} = \frac{\partial v_s}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial s} = \frac{\partial v_s}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{v^2}{2} \right)$$

perchè v_s coincide, all'istante t, con il modulo della velocità v .

Indichiamo con H una lunghezza detta carico totale (o carico effettivo) definita dalla

$$(6.10) \quad g H = \int \frac{dp}{\varrho} - \varphi + \frac{v^2}{2} ;$$

e in particolare, per un f.incomprimibile nel campo della gravità, dalla

$$(6.11) \quad H = z + \frac{p}{\gamma} + \frac{v^2}{2g}$$

La proiezione della (6.8) sulla linea s diventa

$$(6.12) \quad \boxed{\frac{\partial H}{\partial s} = - \frac{1}{g} \frac{\partial v_s}{\partial t}}$$

e rappresenta l'eq.ne del moto barotropico di un fluido ideale riferita ad una linea di corrente.

Con l'ulteriore condizione di

4) Moto permanente, $\partial v_s / \partial t = 0$, dalla (6.12) discende la relazione

$$(6.13) \quad \boxed{\partial H / \partial s = 0}$$

L'eq. (6.13) si integra immediatamente e il risultato

$$(6.14) \quad \boxed{H = \text{cost, lungo una traiettoria}}$$

(linea coincidente, in moto permanente, con la linea di corrente) rappresenta il teorema di Bernoulli.

(*) Se $\varrho = \varrho(p)$ si può scrivere $\frac{1}{\varrho} \vec{\nabla}p = \vec{\nabla}P(p)$; moltiplicando scalarmente per $\frac{ds}{\varrho}$ segue $\frac{1}{\varrho} dp = dP$ e quindi $\int \frac{dp}{\varrho} = P(p)$.

Riassumendo: sotto le condizioni (1) fluido ideale, (2) campo delle forze conservativo, (3) comportamento barotropico del fluido, (4) moto permanente, il teor. di Bernoulli assicura la conservazione del carico effettivo lungo una traiettoria, ossia

$$(6.15) \quad \int \frac{dp}{\rho} - \varphi + \frac{v^2}{2} = \text{cost} \quad \text{su una linea } s$$

In particolare, se il campo delle forze è quello gravitazionale e il fluido si può ritenere incomprimibile,

$$(6.16) \quad H = z + \frac{p}{\gamma} + \frac{v^2}{2g} = \text{cost} \quad \text{su una linea } s .$$

Si è già visto (cfr. n. 2.4) il significato energetico dei primi due termini del trinomio di Bernoulli; il terzo rappresenta evidentemente l'altezza cinetica (detta anche altezza generatrice della velocità v) ossia l'energia cinetica per unità di peso del fluido. Dunque il teor. di Bernoulli esprime la conservazione - sotto le condizioni premesse - dell'energia meccanica totale del fluido riferita all'unità di peso.

6.5 - Estensione del teorema di Bernoulli alle correnti

In una corrente di liquido ideale, incomprimibile, in moto permanente, nel campo della gravità, si considerano due sezioni nelle quali le traiettorie sono sensibilmente rettilinee e parallele (ossia nelle quali la corrente è cilindrica o quasi). Applicando il teor. di Bernoulli ai punti A e B di un filetto elementare (V. fig. 6.1) si ha

$$(6.17) \quad z_1 + \frac{p_1}{\gamma} + \frac{v_1^2}{2g} = z_2 + \frac{p_2}{\gamma} + \frac{v_2^2}{2g}$$

Moltiplichiamo ambo i membri per la portata in peso γdQ del filetto elementare (portata costante per la permanenza del moto) ed integriamo a tutta la portata Q della corrente. Ne deriva l'energia per 1 di tempo, cioè la potenza N della corrente:

$$(6.18) \quad N = \gamma \int_Q \left(z_1 + \frac{p_1}{\gamma} + \frac{v_1^2}{2g} \right) dQ = \gamma \int_Q \left(z_2 + \frac{p_2}{\gamma} + \frac{v_2^2}{2g} \right) dQ .$$

Tenuto conto che:

$$dQ = v_1 d\Omega_1 = v_2 d\Omega_2 \quad \text{per la condizione di continuità in m. permanente;}$$

$z + p/\gamma = h =$ carico piezometrico = cost nelle sezioni 1 e 2 dove la corrente è cilindrica (o quasi) (V. n. 5.6). Nel caso di f. ideale la costanza del carico piezometrico in una sezione di corrente cilindrica deriva dal fatto che è nulla la componente dell'accelerazione sul piano della sezione e quindi su di esso le eq. di Eulero si riducono alle eq. della statica.

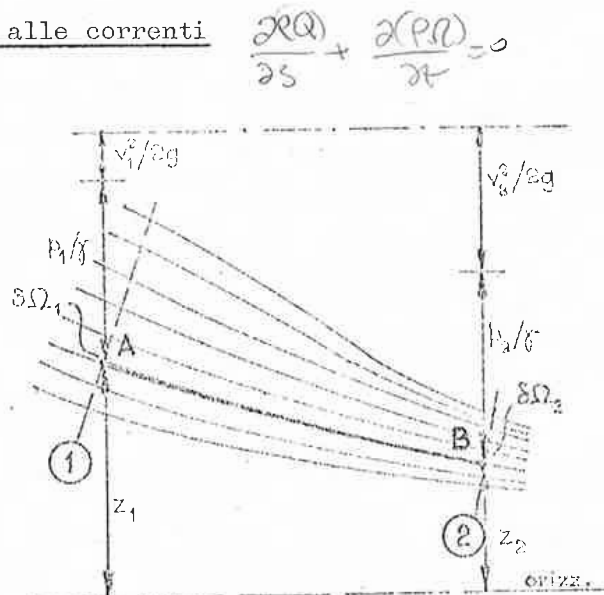


Fig. 6.1

$$\int_{\Omega} \left(\frac{v^2}{2g}\right) v \, d\Omega = \frac{1}{2g} \alpha U^3 \Omega = \frac{1}{2g} \alpha U^2 Q \quad \text{per l'eq. (5.10), con } U = \text{vel. media ed } \alpha = \text{coeff. riduttore dell'En.Cin.};$$

dall'eq. (6.18) deriva la generalizzazione del teor. di Bernoulli

$$(6.19) \quad \boxed{h_1 + \alpha_1 \frac{U_1^2}{2g} = h_2 + \alpha_2 \frac{U_2^2}{2g}} \quad \text{ossia} \quad \boxed{H_1 = H_2}$$

indicando con H_i il carico totale (o effettivo) della corrente = carico piezometrico h_i + altezza cinetica della corrente $\alpha_i U_i^2/2g$ nella sezione i .

Se il fluido è comprimibile, con comportamento barotropico, si possono trascurare normalmente le differenze di quota fra le due sezioni e l'eq. (6.19) diventa

$$(6.20) \quad P_1 + \alpha_1 \frac{U_1^2}{2} = P_2 + \alpha_2 \frac{U_2^2}{2}$$

avendo posto $P = \int dp/\rho$.

6.6 - Generalizzazione e applicabilità del teorema di Bernoulli

L'utilizzazione del teor. di Bernoulli nel campo dei fluidi reali presuppone, come s'è detto, che gli effetti viscosi siano assolutamente trascurabili. Quando tale ipotesi non è del tutto accettabile si può, tuttavia, tenere conto delle perdite con una generalizzazione dell'eq. (6.19)

$$(6.21) \quad \boxed{h_1 + \alpha_1 \frac{U_1^2}{2g} = h_2 + \alpha_2 \frac{U_2^2}{2g} + \Delta H}$$

attribuendo alle perdite ΔH un valore approssimato proporzionale usualmente all'altezza cinetica di valle, ossia

$$(6.22) \quad \boxed{\Delta H = \xi \frac{U_2^2}{2g}}$$

Affinchè la valutazione "a priori" delle perdite non comporti un'approssimazione grossolana dei risultati dell'eq. (6.21), il termine ΔH deve avere un'importanza marginale rispetto agli altri. Per questo i valori di ξ che s'impiegano in pratica sono intorno a 0,10 (e generalmente $\leq 0,15$).

Concludendo, poichè per l'applicabilità del teor. di Bernoulli il comportamento del fluido nel fenomeno considerato deve approssimare quello di fluido ideale, occorre in primo luogo verificare:

- che il tronco di corrente compreso fra le due sezioni considerate sia abbastanza breve da rendere trascurabili le perdite distribuite;
- che la corrente, nel tronco in esame, sia ovunque accelerata per evitare perdite localizzate dovute a vortici e a macroturbolenza. Solo eccezionalmente

questa condizione può non essere soddisfatta, purchè non abbiano luogo, in ogni caso, fenomeni vorticosi (es.: tronco iniziale di un risalto ondulato).

6.7 - Applicazioni del teor. di Bernoulli

6.7.1 - Tubo di Pitot-Prandtl per la misura della velocità

Il tubo di Pitot (di solito nella versione Prandtl) è largamente impiegato per la misura della velocità locale di un fluido in moto, oppure per la misura della velocità di avanzamento di un apparecchio che si muove in un fluido fermo.

Come mostra la fig. 6.2, il misuratore è costituito da un cilindro con testa semisferica e poppa affusolata. Nel centro della testa un piccolo foro B, collegato con un tubo verticale, costituisce la presa di pressione dinamica, mentre una serie di fori distribuiti sulla superficie laterale del cilindro, collegati fra loro e con un altro tubo verticale, consentono la misura della pressione statica nella zona C. Posto che il misuratore non turbi sensibilmente la corrente che lo investe, si può ritenere che la pressione statica p_s in C sia la stessa, che si presenta subito a monte, ad

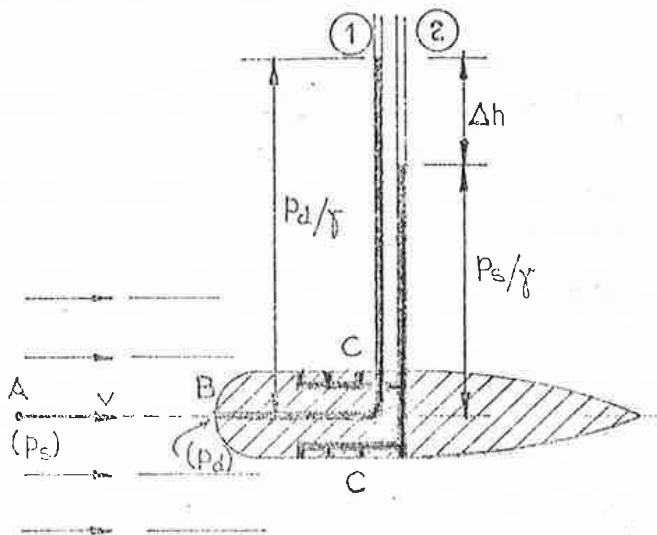


Fig. 6.2

es. nel punto A dove la velocità v del fluido è indisturbata. Lungo la traiettoria AB il fluido rallenta e nel punto di "ristagno" B la velocità si annulla, mentre la pressione assume un corrispondente valore dinamico p_d maggiore di p_s .

Poichè le perdite non sono sensibili, poste le condizioni di moto permanente e di f. incomprimibile, si può applicare il teor. di Bernoulli nella forma (6.16) fra i punti A e B della predetta traiettoria orizzontale

$$(6.23) \quad z_A + \frac{p_s}{\gamma} + \frac{v^2}{2g} = z_B + \frac{p_d}{\gamma} + 0$$

Dalla (6.23), essendo $z_A = z_B$, deriva

$$\frac{v^2}{2g} = \frac{p_d - p_s}{\gamma} = \Delta h$$

e quindi

$$(6.24) \quad v = \sqrt{2g \Delta h}$$

Degli effetti dovuti alla viscosità del fluido e alla geometria del misuratore si può tenere conto introducendo nella (6.24) un coefficiente riduttore di ve-

locità c_v

$$(6.25) \quad v = c_v \sqrt{2g \Delta h}$$

che ha valori poco minori di 1, definibili mediante taratura.

6.7.2 - Venturimetro per la misura della portata

L'apparecchio è indicato nella fig. 6.3. Esso è costituito da un tronco conico convergente che termina nel breve tronco cilindrico di misura, seguito da un tronco conico divergente relativamente lungo (di norma $\theta/2 < 15^\circ$). Il primo tronco può assumere anche la forma di un boccaglio che accompagna la contrazione, come mostra la fig. 6.4. Fra le sezioni 1 e 2 la corrente è accelerata ed ha una lunghezza sufficientemente breve perchè si possano ritenere poco influenti le perdite di energia.

a) Fluido incompressibile

Supposto il moto permanente e il fluido incompressibile, il teorema di Bernoulli è quindi applicabile nella forma (6.19) estesa ad una corrente. Ciò non sarebbe lecito fra le sezioni 2 e 3, tronco nel quale le dissipazioni sono sensibili a causa dell'allargamento e del rallentamento della corrente. Per migliorare il recupero dell'energia cinetica con la trasformazione in potenziale nel divergente conviene assumere $\theta/2 < 10^\circ + 7^\circ$.

Con riferimento alla orizzontale indicata nella fig. 6.3, dette p_1 e p_2 le pressioni nei punti di attacco del manometro differenziale (o degli eventuali piezometri o manometri separati), z_1 e z_2 le relative quote ed U_1 e U_2 le velocità medie nelle sez. 1 e 2, l'eq.ne di Bernoulli fra le stesse sezioni è

$$(6.26) \quad \underbrace{z_1 + \frac{p_1}{\gamma}}_{h_1} + \alpha_1 \frac{U_1^2}{2g} = \underbrace{z_2 + \frac{p_2}{\gamma}}_{h_2} + \alpha_2 \frac{U_2^2}{2g}$$

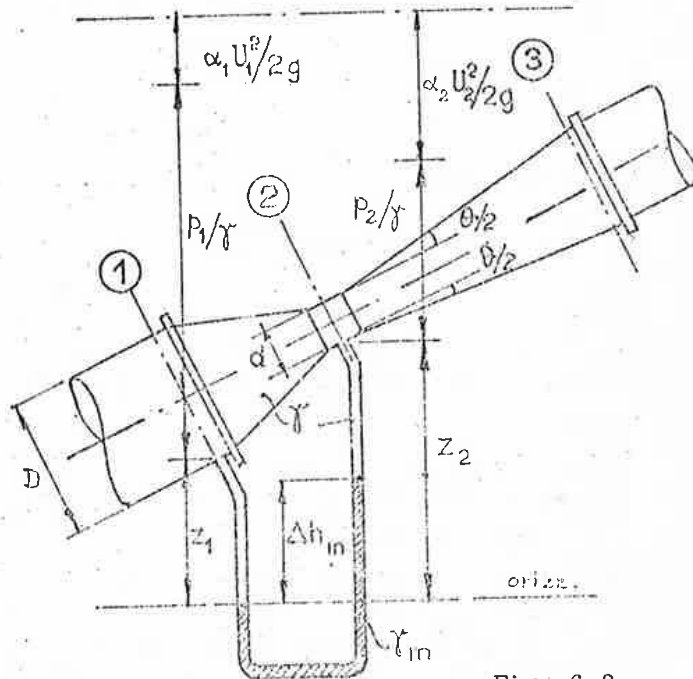


Fig. 6.3

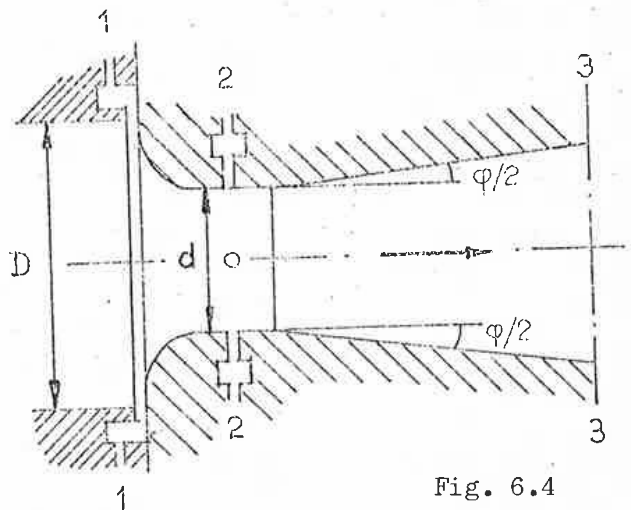


Fig. 6.4

L'eq.ne di continuità, per il moto permanente di f. incomprimibile, assicura la costanza della portata Q , ossia in particolare

$$(6.27) \quad Q = \Omega_1 U_1 = \Omega_2 U_2$$

• Tenuto conto di questo, l'eq. (6.26) diventa

$$(6.28) \quad \frac{Q^2}{2g} \left(\frac{\alpha_2}{\Omega_2^2} - \frac{\alpha_1}{\Omega_1^2} \right) = \overbrace{\left(z_1 + \frac{p_1}{\gamma} \right)}^{h_1} - \overbrace{\left(z_2 + \frac{p_2}{\gamma} \right)}^{h_2} = \Delta h_{1-2}$$

ossia

$$(6.29) \quad Q = \frac{\Omega_2}{\sqrt{\alpha_2 - \alpha_1 (\Omega_2/\Omega_1)^2}} \cdot \sqrt{2g \Delta h_{1-2}} = m \Omega_2 \sqrt{2g \Delta h_{1-2}}$$

essendo m un coefficiente di portata dipendente dal rapporto di strozzamento Ω_2/Ω_1 e dalla distribuzione di velocità. In effetti, anche la viscosità del fluido influisce su m attraverso il n° di Reynolds $U_2 d/\nu$ e i valori da impiegare si possono ottenere o per taratura diretta o per confronto con i valori tabellati UNI.

La differenza di carico piezometrico Δh_{1-2} fra le sez. 1 e 2 può essere letta direttamente oppure, come nel caso della fig. 6.3, può essere calcolata a partire dalla lettura Δh_m al manometro differenziale. Si ha

$$(6.30) \quad p_1 + \gamma z_1 = p_2 + \gamma (z_2 - \Delta h_m) + \gamma_m \Delta h_m$$

essendo γ e γ_m i p. specifici del fluido nel venturimetro e del f. manometrico. Dalla (6.30) segue

$$\left(\frac{p_1}{\gamma} + z_1 \right) - \left(\frac{p_2}{\gamma} + z_2 \right) = \frac{\gamma_m - \gamma}{\gamma} \Delta h_m$$

cioè

$$(6.31) \quad \Delta h_{1-2} = \left(\frac{\gamma_m}{\gamma} - 1 \right) \Delta h_m$$

Per misure di portate d'acqua, impiegando come f. manometrico il mercurio, si ha: $\Delta h_{1-2} = 12,6 \Delta h_m$ e quindi $Q = 3,55 m \Omega_2 \sqrt{2g \Delta h_m}$.